

# Brownsche Bewegung – Experimente zu Einsteins Theorie

Volker Martini

## 1. Einleitung

Es ist faszinierend zu sehen, wie mikroskopisch kleine Teilchen sich vollkommen regellos, wie von Geisterhand getrieben durch eine Flüssigkeit bewegen. Wer die ziellose, niemals zur Ruhe kommende Wanderung der Teilchen mit eigenen Augen einmal gesehen hat, vergisst sie nicht. Diese vom Botaniker Brown 1827 entdeckte und nach ihm benannte Bewegung spiegelt die Wärmebewegung der sehr viel kleineren unsichtbaren Flüssigkeitsmoleküle wider, welche die mikroskopischen Teilchen umgeben und diese ständig in unvorhersagbarer Weise von allen Seiten anstoßen.

Vor 100 Jahren hatte Einstein in seiner Arbeit mit dem Titel „Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen“<sup>1) 2)</sup> eine Theorie entwickelt, mit der er eine präzise Vorhersage für die Häufigkeitsverteilung der Verschiebungen der Teilchen macht. Einstein hat, als er die Arbeit schrieb, von der Brownschen Bewegung gehört, sie aber selbst nicht gesehen. Erst einige Jahre später konnte der französische Physiker Jean Perrin die Theorie Einsteins experimentell bestätigen, wofür er 1926 den Nobelpreis für Physik erhielt<sup>3)</sup>.

In der vorliegenden Arbeit wird eine einfache Apparatur beschrieben, mit der Schüler die Brownsche Bewegung erleben und darüber hinaus sehr genau studieren können. Sie können mit der Apparatur Videoaufnahmen anfertigen und anhand dieser Aufnahmen mit Hilfe des Computers die Bewegung einzelner Teilchen analysieren. Sie können dabei ihre experimentellen Ergebnisse mit Einsteins Theorie vergleichen und darüber hinaus eine für alle Naturwissenschaften wichtige Konstante bestimmen, nämlich die Avogadrozahl, die die Anzahl der Moleküle in der chemischen Mengeneinheit Mol angibt. Das hier beschriebene Verfahren wurde teilweise von zweien meiner Schüler, Alina Mjakotkin und Stefan Kleeschulte, getestet. Sie haben in einer von mir betreuten Arbeit u.a. die Bewegung von Titandioxid-Mikrokristallen in Wasser studiert. Ihre Arbeit „Brownsche Bewegung: Videoaufnahmen, Analyse und Vergleich mit Einsteins Theorie“, mit der sie sich zur Zeit am Wettbewerb „Jugend forscht“ beteiligen, beweist, dass Schüler durchaus in der Lage sind, die hier vorgestellten Experimente und Analysen nach genereller Anleitung weitgehend selbständig mit Erfolg durchzuführen.

## 2. Videoaufnahmen am Mikroskop

Die regellose Bewegung von Teilchen in einer Flüssigkeit tritt erst dann merklich in Erscheinung, wenn die Teilchen sehr klein sind. Geeignet sind Suspensionen, bei denen die suspendierten Teilchen einen Durchmesser in der Größenordnung von einem Mikrometer haben. Für die Beobachtung im Unterricht sind im Prinzip Suspen-

---

<sup>1)</sup> A. Einstein, Annalen der Physik und Chemie, IV. Folge, Band 17 (1905) S. 549 - 560

<sup>2)</sup> <http://www.wiley-vch.de:80/berlin/journals/adp/historic.html>

<sup>3)</sup> <http://nobelprize.org/physics/laureates/1926/perrin-lecture.html>

sionen von Poliermitteln, Farbpartikeln oder Fetttröpfchen der Milch geeignet. In einem vorgegebenen Zeitintervall bewegen sich die kleinen Teilchen einer Suspension weiter als die großen. Einstein hat in seiner oben zitierten Arbeit berechnet, dass ein Teilchen mit einem Durchmesser von  $1\ \mu\text{m}$  in Wasser in einer Minute im Mittel  $6\ \mu\text{m}$  weit verschoben wird. Diese Verschiebung lässt sich mit einem Mikroskop beobachten und vermessen.

Für eine Analyse der Bewegung ist es notwendig, sie zu filmen. Preiswert und dennoch ausreichend gut geeignet sind PC-Videokameras, wie man sie für die Kommunikation im Internet verwendet. Für die Videoaufnahmen am Mikroskop entfernen wir bei einer PC-Kamera das Objektiv und bei dem Mikroskop das Okular. Die PC-Kamera mit frei liegendem Sensor montieren wir an den offenen Tubus des Mikroskops. Das von dem Objektiv des Mikroskops erzeugte Zwischenbild, das man normalerweise am Ende des Tubus mit dem Okular betrachtet, wird jetzt unmittelbar auf den Sensorchip projiziert. Schließt man die Videokamera an einen Computer an, kann man das Videobild mit einer passenden Software live auf dem Monitor betrachten.

Als Kamera verwenden wir die USB-Web-Camera „ToUcam PRO II 840K“ von Philips. Diese Kamera verfügt über einen lichtempfindlichen CCD-Sensor mit  $640(\text{B}) \times 480(\text{H})$  Pixel. Sehr hilfreich ist ein für diese Kamera angebotener  $1\frac{1}{4}$ ''-Steckadapter, der für die Verbindung der Kamera mit einem Teleskop entwickelt wurde, um astronomische Videobeobachtungen zu ermöglichen. Dieser Adapter passt über den Tubus unseres Mikroskops und muss lediglich etwas festgeklemmt werden (Abb. 1). Die Sensorfläche der Kamera hat ungefähr die Maße  $2,7\ \text{mm} \times 3,6\ \text{mm}$ . Verwendet man ein Objektiv mit 100-facher Vergrößerung, so wird ein Beobachtungsfeld von  $27\ \mu\text{m} \times 36\ \mu\text{m}$  bildfüllend auf der Sensorfläche dargestellt, wenn diese sich in der normalen Zwischenbildebene befindet. Die Vergrößerung ist so stark, dass ein menschliches Haar mit einer Dicke von  $60\ \mu\text{m}$  in seiner Breite gar nicht vollständig abgebildet werden kann. Bei unserem Mikroskop mussten wir den Sensor etwas weiter vom Objektiv entfernt montieren. Dies bedeutet, dass das Bild in der Ebene des Sensors noch weiter vergrößert erscheint.

Für die spätere Auswertung ist es notwendig, den Vergrößerungsfaktor genau

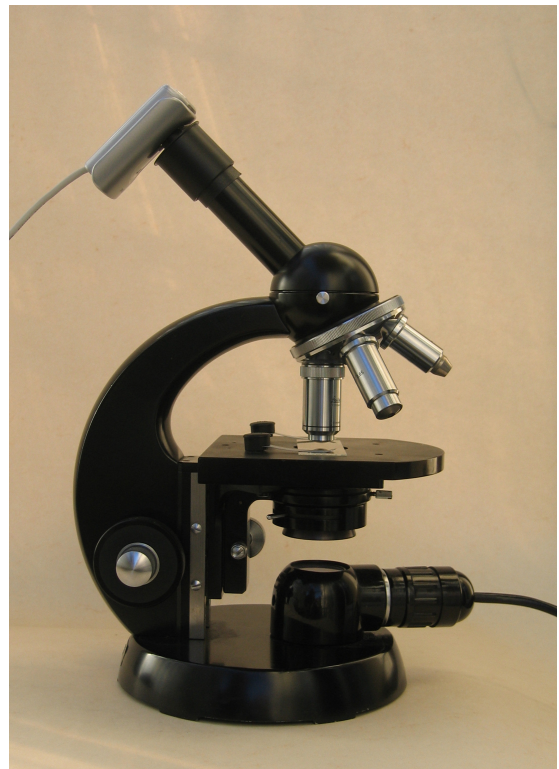


Abb. 1 : Mikroskop mit PC-Kamera



Abb. 2 : Optisches Gitter mit 600 Linien pro Millimeter

zu bestimmen. Hierzu werden mit der Apparatur die Striche eines optischen Beugungsgitters mit 600 Linien pro Millimeter gefilmt. Die Vermessung eines Standbildes (Abb. 2 ) ergibt, dass das vom Sensor erfasste Beobachtungsfeld  $31,9 \mu\text{m}$  breit ist. Diese Breite ist unser Referenzmaß. Die Videofilme werden mit dem Programm „VideoImpression“ von ArcSoft aufgezeichnet. Als Einzelbildrate wurden 10 Bilder pro Sekunde gewählt und als Ausgabegröße  $640 \times 480$  Pixel.

Wie oben erwähnt ist es sinnvoll, möglichst kleine Teilchen zu beobachten, weil diese sich am weitesten bewegen. Für die Größe der Teilchen, die sich mit einem Lichtmikroskop beobachten lassen, gibt es allerdings eine untere Grenze, die durch die Wellennatur des Lichts bestimmt ist. Sie ist dann erreicht, wenn die Teilchen einen Durchmesser haben, der in der Größenordnung der Wellenlänge des Lichts liegt. Diese beträgt für gelbes Licht in Wasser  $0,45 \mu\text{m}$ . Die untersuchten Teilchen sollten nicht kleiner aber auch nicht wesentlich größer als  $0,5 \mu\text{m}$  sein. Für quantitative Untersuchungen sollten die Teilchen einer Suspension außerdem kugelförmig sein, um die experimentellen Ergebnisse mit Einsteins Theorie vergleichen zu können, die er für kugelförmige Objekte entwickelt hat. Wünschenswert ist weiterhin, dass alle Teilchen gleich groß sind. Ein einzelnes Teilchen bleibt nur für eine begrenzte Zeit in dem Beobachtungsfeld des Mikroskops. Für eine gute Statistik müssen darum die Verschiebungen von mehreren Teilchen gleicher Größe vermessen werden.

Im Handel werden für Forschung und Industrie Mikrokugeln aus den verschiedensten Materialien in vielen Größen angeboten. Wir verwenden in unseren Experimenten in Wasser suspendierte Latex-Mikrokugeln mit einem Durchmesser von  $0,945 \mu\text{m}$  bzw.  $0,520 \mu\text{m}$ . Ein Tropfen der Suspension wird auf einen Objektträger aufgebracht und ohne Abdeckglas in Kontakt mit der Objektivlinse gebracht. Die Scharfeinstellung des Mikroskops, die bei einem Objektiv mit 100-facher Vergrößerung durchaus ein Problem darstellen kann, gelingt hier ohne besondere Anstrengungen gewissermaßen von alleine. Da die Mikrokugeln im Flüssigkeitstropfen gleichmäßig verteilt sind, gibt es immer welche, die sich in derjenigen Ebene befinden, die von dem Objektiv scharf abgebildet wird.

Die Kugeln sind auf den Videobildern gut zu erkennen, haben aber auch bei optimaler Lage zum Objektiv keinen scharfen Rand, da das Licht an den Mikrokugeln gebeugt wird (Abb. 3). In der Regel erscheinen die Kugeln als unscharfe dunkle Kreis-

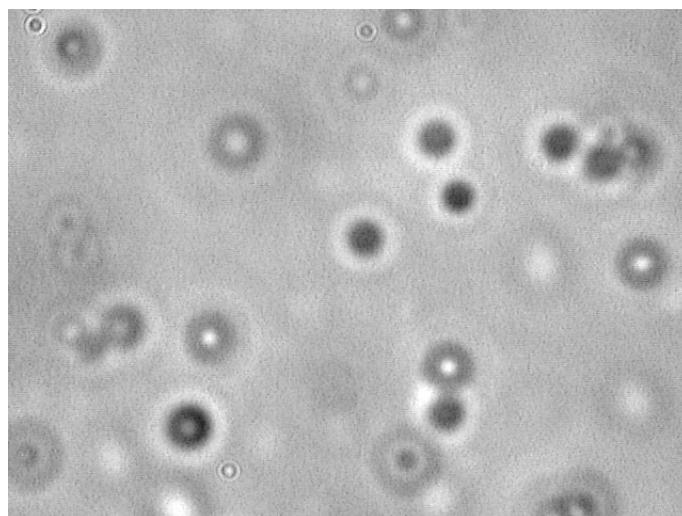


Abb. 3 : Beugungsbilder von Latex-Mikrokugeln mit einem Durchmesser von  $0,945 \mu\text{m}$

scheiben umgeben von einem hellen Ring. Diese Beugungsstruktur ändert sich, wenn die Kugeln sich von der Ebene wegbewegen, auf die das Objektiv scharf eingestellt ist. Die Zentren der einzelnen Teilchen sind häufig von mehreren konzentrischen Ringen umgeben, wobei die Zentren selbst manchmal hell und manchmal dunkel sind (Abb. 3). Die Strukturen ändern sich laufend mit der Bewegung der Kugeln. Dies ist ein faszinierendes und für sich genommen interessantes Phänomen. Bei der Untersuchung der Brownschen Bewegung stören die sich ändernden Beugungsringe nicht. Wir interessieren uns nur für die Bewegung des Schwerpunktes der Kugeln. Dieser stimmt in der Projektion mit dem Mittelpunkt der Beugungsringe überein, und seine Position lässt sich ohne Schwierigkeit genau vermessen.

### 3. Vermessung des Zufallsweges von Latex-Mikrokugeln

Unsere Studien der Brownschen Bewegung konzentrieren sich wie gesagt auf die Untersuchung von in Wasser suspendierten Latex-Mikrokugeln. Um ihre Bewegung mit der Theorie von Einstein vergleichen zu können, muss sie zunächst präzise vermessen werden. Für den Physik-Unterricht stehen eine Reihe von Computerprogrammen zur Verfügung, die es ermöglichen, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung von Objekten zu bestimmen, deren Bewegungen in einem Videofilm festgehalten wurden. Wir benutzen das Programm DiVA<sup>4)</sup>. Abb. 4 zeigt die Benutzeroberfläche des Programms. Der gewünschte Videofilm kann einzelbildweise betrachtet werden. Durch Anklicken eines Punkts des Objekts mit dem Mauszeiger kann man dessen Position zusammen mit dem Zeitwert des Bildes erfassen.

Als Cursor benutzen wir ein Fadenkreuz, dessen Kreuzungspunkt wir nach Augenmaß auf das Zentrum des ringförmigen Beugungsbildes der betrachteten Mikrokugel setzen. Von dem Programm werden dann die Koordinaten des Mittelpunkts in sogenannten Bildschirmeinheiten angegeben und gespeichert. Die Fläche eines Einzelbildes ist 11565 Bildschirmeinheiten breit und 8670 Bildschirmeinheiten hoch. Die Anzahl unterscheidbarer Bildpunkte ist aber deutlich kleiner. Das Programm gibt die Koordinaten nur als ganzzahlige Vielfache von 15 Bildschirmeinheiten an. Insgesamt werden also 771(B) x 578(H) Bildpunkte erfasst. Diese Zahl ist etwas größer als die Anzahl der Pixel des Sensors ( 640(B) x 480(H) ) in unserer Videokamera. Mit der in Abschnitt 2 angegebenen Eichung ergibt sich hieraus der Abstand der Gegenstandspunkte, die zu benachbarten Bildpunkten gehören, zu  $31,9/771 \mu\text{m} = 0,041 \mu\text{m}$ . Wenn man die Position des Mittelpunkts einer Mikrokugel wie beschrieben ermittelt, treten natürlich Messfehler auf. Um die Größe des zufälligen Messfehlers abzuschätzen, wurden einige Filmausschnitte mehrfach vermessen. Der unmittelbare Vergleich der wiederholt gemessenen Verschiebungen zeigt, dass die Standardabweichung 1,5 Bildpunkte bzw.  $0,062 \mu\text{m}$  beträgt. Dies sind bei den

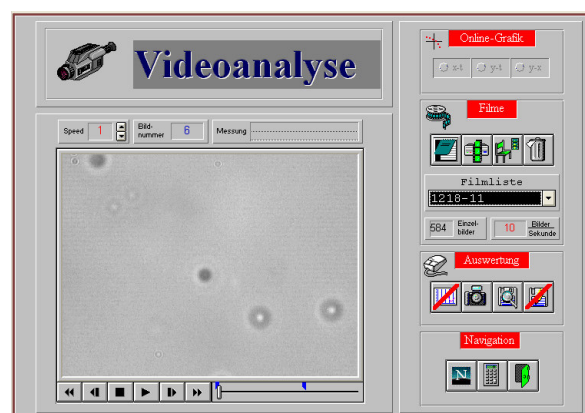


Abb. 4 : Benutzeroberfläche des Videoanalyse-Programms DiVA

<sup>4)</sup> H. Hilscher und C. Dziarstek, DiVA, Institut für Physik der Universität Augsburg, 1997

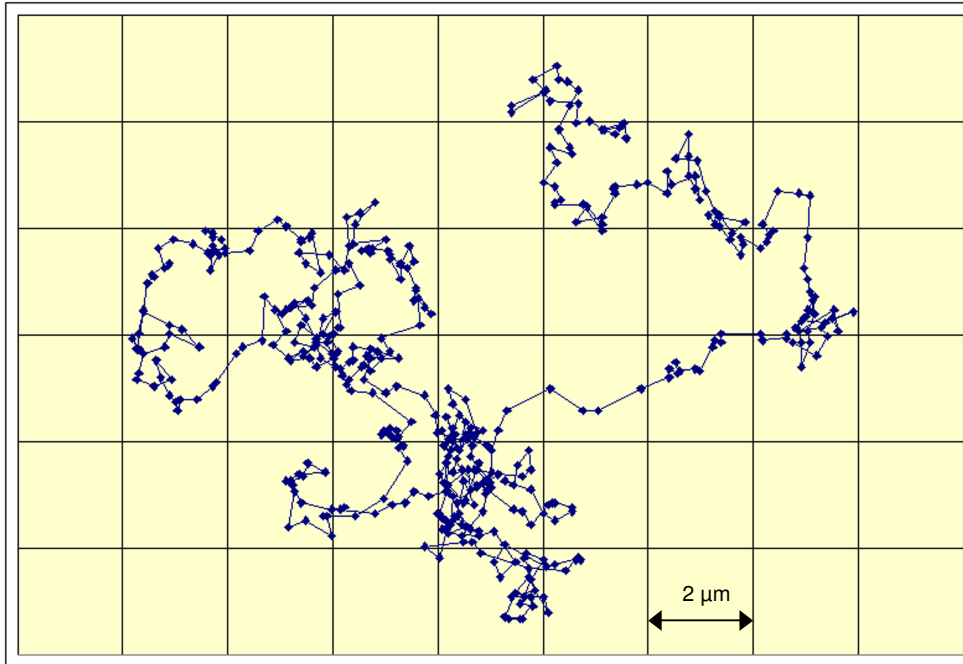


Abb. 5 : Zufallsweg des Mittelpunkts einer 0,945 µm großen Latex-Mikrokugel in 45 Sekunden in Schritten von 0,1 Sekunden

0,945 µm und 0,520 µm breiten Mikrokugeln lediglich 7% bzw. 12% ihres Durchmessers.

Die für einen bestimmten Filmausschnitt Bild für Bild gemessenen Koordinaten einer Mikrokugel wurden nach Beendigung der Messung in das Tabellenkalkulationsprogramm MS-EXCEL exportiert. Hier werden die in Bildschirmeneinheiten vorliegenden Koordinaten entsprechend der Eichung in Mikrometer umgerechnet und die Positionen der Kugeln in einem Diagramm dargestellt. Als Beispiel wird in Abb. 5 der in eine Ebene projizierte Zufallsweg einer 0,945 µm großen Latex-Mikrokugel in Wasser gezeigt, den diese in Schritten von 0,1 Sekunden in 45 Sekunden zurücklegt. Man erhält einen anschaulichen Gesamteindruck von der Zufälligkeit der Bewegungsrichtung und der Verschiebungsweite. Die Zufallswege der einzelnen Teilchen sind außerordentlich vielgestaltig. Ihre filigranen Formen haben trotz der Regellosigkeit einen bemerkenswerten ästhetischen Reiz und lassen eine verborgene Gesetzmäßigkeit erahnen.

#### 4. Analyse der Verschiebungen und Vergleich mit Einsteins Theorie

Ziel unseres Projektes ist es, anhand von Experimenten die physikalische Wirklichkeit der Theorie von Einstein gegenüber zu stellen. Wir müssen also aus unseren Messdaten physikalische Größen ableiten, für die Einstein eine konkrete Vorhersage gemacht hat. Die in einer Flüssigkeit suspendierten Teilchen bewegen sich in alle drei Raumrichtungen. Einstein beschränkt sich in seiner Arbeit darauf, den Anteil der Bewegung zu beschreiben, der sich in eine der drei Raumrichtungen (x-Richtung) vollzieht. Dies ist vollkommen ausreichend, weil die Bewegungen in die beiden anderen Raumrichtungen hiervon unabhängig sind und denselben Gesetzmäßigkeiten folgen. Als Ergebnis seiner umfangreichen Rechnungen gibt Einstein eine Funktion

an, mit der er die Häufigkeitsverteilung der in einer beliebigen Zeit  $t$  erfolgten Verschiebungen  $x$  beschreibt :

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad \text{mit} \quad D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi k P}$$

Hierin ist  $n$  die Anzahl aller in konstanten Zeitintervallen betrachteten Verschiebungen,  $D$  der Diffusionskoeffizient,  $R$  die Gaskonstante,  $T$  die absolute Temperatur,  $N$  die Avogadrokonstante,  $k$  die dynamische Viskosität und  $P$  der Radius der Kugeln des suspendierten Stoffes. Diese Häufigkeitsverteilung ist, wie Einstein schon vorher vermutete, dieselbe wie die der zufälligen Fehler. Es ist die bekannte Normalverteilung. Aus der Häufigkeitsverteilung ergibt sich die mittlere Verschiebung  $\lambda_x$  in  $x$ -Richtung, oder – wie Einstein es genauer ausdrückt – die Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Verschiebungen in  $x$ -Richtung :

$$\lambda_x = \sqrt{t} \cdot \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi k P}}$$

Durch Quadrieren der Gleichung erkennt man, dass nach der Theorie ein proportionaler Zusammenhang zwischen der mittleren quadratischen Verschiebung  $\lambda_x^2$  und der Zeit  $t$  zu erwarten ist.

Für den Vergleich von Theorie und Experiment wird zunächst die experimentelle Häufigkeitsverteilung der Verschiebungen in  $x$ -Richtung bestimmt. Hierzu werden die nach der Vermessung des Zufallsweges im Excel-Programm vorliegenden  $x$ - und  $y$ -Koordinaten der Positionen der Latex-Kugeln benutzt, um für jede Position der Kugeln die Verschiebung gegenüber der vorhergehenden Position sowohl in  $x$ -Richtung als auch in  $y$ -Richtung zu berechnen. Außerdem werden die Quadrate der Verschiebungen berechnet. Da die Bewegungen in die beiden Richtungen unabhängig voneinander sind und dieselbe Häufigkeitsverteilung haben, werden die beiden Daten-

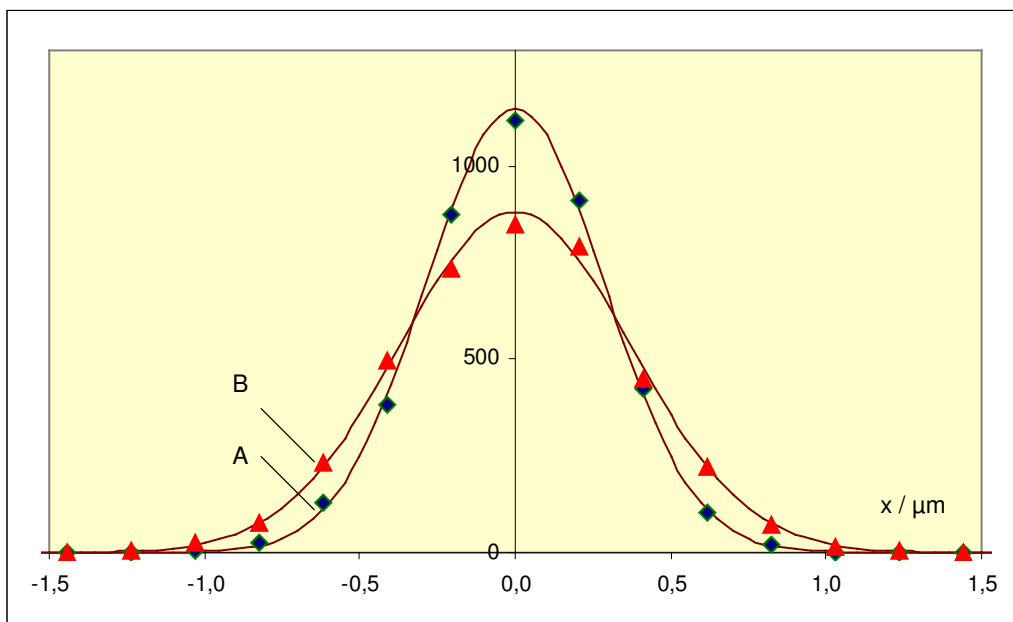


Abb. 6 : Häufigkeitsverteilungen der Verschiebungen in  $x$ -Richtung in Intervallen von 0,1 Sekunden für Latex-Mikrokugeln mit Durchmessern von 0,945  $\mu\text{m}$  (A) und 0,520  $\mu\text{m}$  (B) im Vergleich zu Einsteins Theorie (durchgezogene Linien)

sätze zu einem gemeinsamen Datensatz zusammengefasst, um so zu einer besseren Statistik mit mehr Werten zu gelangen. Die Häufigkeitsverteilung lässt sich nun mit der im Excel-Programm vorhandenen Funktion „HÄUFIGKEIT“ bestimmen. Zuvor muss lediglich eine Klasseneinteilung für die Verschiebungen  $x$  angegeben werden. Wir verwenden als Klassenbreite die Strecke, die zum fünffachen Abstand benachbarter Bildpunkte gehört, sie beträgt  $0,207 \mu\text{m}$ . Für jede der beiden Kugelsorten mit den Durchmessern  $0,945 \mu\text{m}$  und  $0,520 \mu\text{m}$  wird die Häufigkeitsverteilung von 4000 Verschiebungen bestimmt. Das Ergebnis ist in Abb. 6 dargestellt. Die beiden Häufigkeitsverteilungen werden mit Normalverteilungen verglichen, welche mit den durchgezogenen Linien dargestellt werden. Zur Anpassung der Normalverteilungen an die experimentellen Daten wurde als Varianz die aus den gemessenen Verschiebungen berechnete mittlere quadratische Verschiebung verwendet. Außerdem wurde die Normalverteilung so normiert, dass die Flächen unter der theoretischen und der experimentellen Kurve gleich sind. Die Abbildung zeigt, dass die gemessenen Häufigkeitsverteilungen sich tatsächlich, entsprechend der Theorie von Einstein, sehr gut durch Normalverteilungen beschreiben lassen. Wie zu erwarten ist die Varianz – also die mittlere quadratische Verschiebung in  $x$ -Richtung – für die kleineren Kugeln deutlich größer als für die größeren.

Wie oben erwähnt erwartet man, dass die mittlere quadratische Verschiebung in  $x$ -Richtung proportional ist zur Zeit  $t$ . Dies können wir anhand unserer experimentellen Daten überprüfen, indem wir beispielsweise bei der Berechnung der Verschiebung jeden zweiten Punkt unberücksichtigt lassen. Dadurch verdoppelt sich die Länge des zugehörigen Zeitintervalls. Entsprechend können auch Verschiebungen für die dreifache, vierfache usw. Zeitintervalllänge ermittelt werden. Auf diese Weise haben wir die mittlere quadratische Verschiebung in  $x$ -Richtung für Zeiten von 0,1 Sekunden bis 0,8 Sekunden für beide Kugelgrößen bestimmt. Das Ergebnis wird in Abb. 7 grafisch dargestellt. In beiden Fällen bestätigt sich der proportionale Zusammenhang. Der Quotient  $\lambda_x^2 / t$  ist also eine von der Zeit  $t$  unabhängige Konstante. Sie ist erwartungsgemäß für die kleineren Kugeln größer als für die größeren Kugeln.

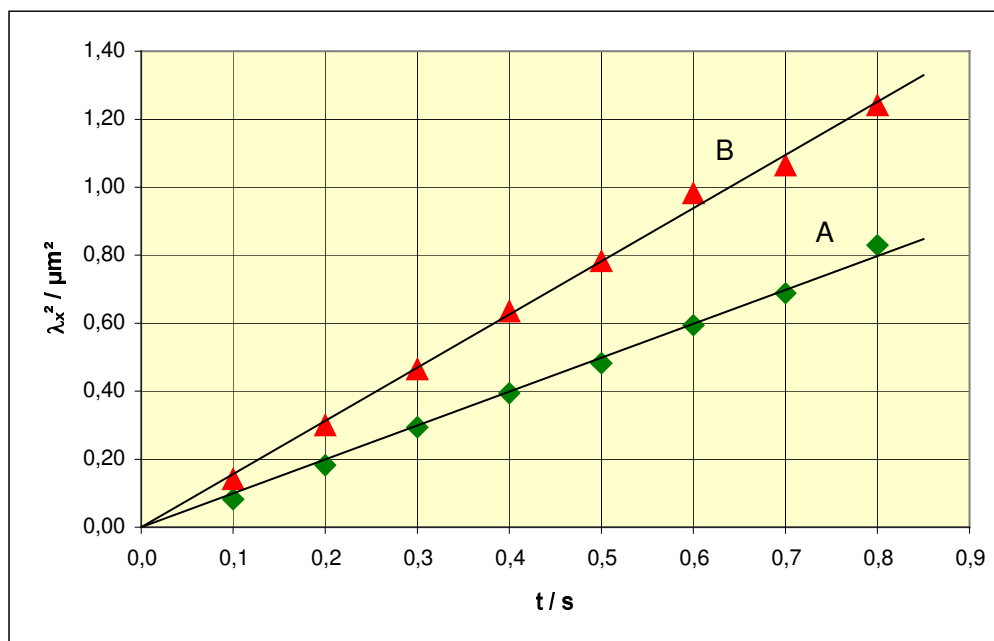


Abb. 7 : Mittlere quadratische Verschiebung für Latex-Mikrokugeln mit Durchmessern von  $0,945 \mu\text{m}$  (A) und  $0,520 \mu\text{m}$  (B) in Abhängigkeit von der Zeit

In der Einleitung seiner Arbeit schreibt Einstein: „Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten lässt, so ist ... eine exakte Bestimmung der Atomgröße möglich.“ – Am Ende der Arbeit gibt er, gewissermaßen als Quintessenz seiner Theorie, die durch einfache Umformung der letzten erhaltene Gleichung an, mit der sich die Avogadrokonstante und damit auch die Atom- bzw. Molekülgröße bestimmen lässt:

$$N = \frac{t}{\lambda_x^2} \cdot \frac{RT}{3\pi k P}$$

Für  $t / \lambda_x^2$  setzen wir den Kehrwert des Anstieges der Ausgleichsgeraden im  $t\text{-}\lambda_x^2$ -Diagramm ein, für P die Hälfte des vom Hersteller angegebenen Durchmessers der Latex-Mikrokugeln, für T die mit einem Thermometer gemessene und in Kelvin umgerechnete Temperatur und für die dynamische Viskosität k den zur gemessenen Temperatur gehörenden Tabellenwert<sup>5)</sup>. Unsere Ergebnisse der beiden Messreihen A und B, in denen jeweils 4000 Verschiebungen analysiert worden sind, werden in Tabelle 1 zusammengefasst.

	$n$	$P$ in $\mu\text{m}$	$\frac{t}{\lambda_x^2}$ in $\frac{\text{s}}{\mu\text{m}^2}$	$T$ in $\text{K}$	$k$ in $\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}$	$N$ in $\frac{1}{\text{mol}}$
A	4000	0,473	1,003	296	$0,933 \cdot 10^{-3}$	$5,93 \cdot 10^{23}$
B	4000	0,260	0,640	292	$1,027 \cdot 10^{-3}$	$6,18 \cdot 10^{23}$

Tabelle 1 : Ergebnisse der beiden Messreihen A und B und die hieraus abgeleiteten Werte für die Avogadrokonstante N

Die in der Tabelle angegebenen Größen sind mit relativen Fehlern von nur wenigen Prozent behaftet. Für den Durchmesser P der Latexkugeln gibt der Hersteller eine Standardabweichung von 3% an. Den relativen Fehler von  $t/\lambda_x^2$  schätzen wir aus der Streuung der Messwerte im  $t\text{-}\lambda_x^2$ -Diagramm zu 2% ab. Als Unsicherheit in der Temperaturbestimmung nehmen wir 1 K an. Dies bedeutet für die Temperatur T selbst einen relativen Fehler von 0,3% und für die dynamische Viskosität k einen relativen Fehler von 2,3%. Insgesamt schätzen wir den relativen Fehler für die von uns experimentell ermittelte Avogadrokonstante unter Berücksichtigung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes nach oben hin zu 5% ab. Die tatsächliche Abweichung vom Tabellenwert  $N = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  beträgt für die beiden Messreihen 1,5% bzw. 2,6% und ist somit beide Mal kleiner als der geschätzte Fehler. Der Mittelwert der beiden Reihen weicht mit  $6,055 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  sogar nur um 0,5% vom Tabellenwert ab.

Mithilfe der Avogadrokonstanten lässt sich die Größe der unsichtbaren Wassermoleküle berechnen, welche die Latex-Mikrokugeln von allen Seiten anstoßen. Das molare Volumen von Wasser beträgt  $18 \text{ cm}^3$  bzw.  $18 \cdot 10^{12} \mu\text{m}^3$  und enthält  $6,022 \cdot 10^{23}$  Wassermoleküle. Hieraus ergibt sich, dass jedes Wassermolekül ein Volumen von  $2,99 \cdot 10^{-11} \mu\text{m}^3$  einnimmt. Dies entspricht dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge von  $0,00031 \mu\text{m}$  bzw.  $310 \text{ pm}$ . Die Wassermoleküle sind also ca. 3000 Mal kleiner als die Latex-Mikrokugeln der Messreihe A und ca. 1700 Mal kleiner als diejenigen der Messreihe B. Wenn man sich im ersten Fall eine Latex-Mikrokugel vergrößert

<sup>5)</sup> [www.thermexcel.com/english/tables/eau\\_atm.htm](http://www.thermexcel.com/english/tables/eau_atm.htm)

Bert vorstellt als Wasserball mit einem Durchmesser von 30 cm, hätten entsprechend die Wassermoleküle einen Durchmesser von nur 0,1 mm.

## 5. Bedeutung für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht

Schüler lernen schon zu Beginn ihrer naturwissenschaftlichen Ausbildung, dass sich beispielsweise Luft, Wasser oder Steine aus kleinen Teilchen zusammensetzen, die man sich als winzige Kugeln vorzustellen hat. Dieses sogenannte Teilchenmodell ist ein wichtiges Modell, um z.B. Aggregatzustände und ihre Umwandlungen zu verstehen. Als Lehrer versucht man anhand von Bildern möglichst anschaulich zu schildern, wie Wasserteilchen sich verhalten, wenn Wasser bei Abkühlung unter 0°C gefriert oder beim Kochen verdampft. Trotz aller Bemühungen entwickeln die noch jungen Schüler naturgemäß eine recht verschwommene Vorstellung von den Teilchen, weil sie diese nicht sehen können. Es ist für sie außerordentlich schwer, sich ein Bild von der Größe der Teilchen zu machen und noch schwerer, sich vorzustellen, wie sie sich bewegen. Die Lage der Schüler ist durchaus vergleichbar mit der Situation der Wissenschaftler zu Beginn des letzten Jahrhunderts, als Einstein seine Arbeit zur Brownschen Bewegung schrieb. Damals hatte man eine wunderbare Theorie, aber keinen Beweis für die reale Existenz der Atome und Moleküle. Man hatte erst recht keine Vorstellung von ihrer Größe und Gestalt.

Leider ist es so, dass man auch bei stärkster Vergrößerung mit einem Lichtmikroskop Atome und Moleküle nicht sichtbar machen kann, weil sie kleiner sind als die Wellenlänge des verwendeten Lichts. Wenn aber Schüler mit einem stark vergrößernden Mikroskop in einen Milchtropfen hineinschauen, entdecken sie eine außerordentlich faszinierende Zitterbewegung von dicht beieinander liegenden winzigen Fetttropfchen. Dies ist eine wichtige Entdeckung, da sie zeigt, dass im Mikrokosmos auch leblose Teilchen ständig in Bewegung sind. Allerdings darf nicht der falsche Eindruck entstehen, dass die Fetttropfchen sich in irgendeiner Weise in Bewegung halten, weil sie ständig gegeneinander stoßen. Auf der Suche nach der Ursache der Bewegung ist es wichtig, die Suspension so weit zu verdünnen, dass die suspendierten Teilchen deutlich voneinander getrennt sind. Die ziellose einsame Wanderung einzelner Teilchen lenkt den Blick auf das umgebende Medium, und man kommt der wahren Ursache, nämlich der Wärmebewegung der Flüssigkeitsmoleküle, schon näher. Im Unterricht wird man Schüler genügend Zeit geben, die Bewegung von mikroskopisch kleinen Teilchen in Flüssigkeiten bei vertrauten Stoffen wie verdünnter Scheuermilch oder verdünnter Wasserfarbe ausgiebig zu beobachten. Sie werden staunend erleben, wie die Teilchen wandern, wie sie sich drehen, wie sie gegeneinander stoßen, sich zusammenlagern und sich wieder voneinander trennen.

Die beobachteten Bewegungsvorgänge sind vollkommen regellos und wiederholen sich nicht. Um einzelne Bewegungsvorgänge diskutieren zu können, sollte man Videoaufzeichnungen machen. Etwa ab Klasse 7 lassen sich die Aufzeichnungen verwenden, um Schüler mit einem Videoanalyseprogramm die Bahnkurven einzelner Teilchen grafisch darstellen zu lassen. Anhand der Grafiken können eine Reihe von Fragen qualitativ diskutiert werden: Wie weit bewegen sich die Teilchen von Bild zu Bild? Wie lang ist der größte zurückgelegte Weg? Wie stark streuen die Wegstrecken? Welchen Einfluss hat die Größe der Teilchen auf ihre Bewegung? Kommt es vor, dass Teilchen über einen längeren Zeitraum gesehen an den Ort zurückkommen, von dem sie gestartet sind?

Gegen Ende der Sekundarstufe I sind Schüler in der Lage, die Daten genauer auszuwerten. Sie haben dann genügend Ausdauer und Sicherheit, um viele Daten präzise zu erfassen und auszuwerten. Im Allgemeinen sind sie dann auch vertraut im Umgang mit einem Tabellenkalkulationsprogramm, mit dem sie beispielsweise die mittlere quadratische Verschiebung eines Teilchens für ein vorgegebenes Zeitintervall bestimmen können. Je mehr Daten ausgewertet werden, desto kleiner wird der statistische Fehler. Es ist sinnvoll, die Arbeit auf mehrere Gruppen zu verteilen, welche im Anschluss gegenseitig ihre Teilergebnisse vorstellen. Schließlich können die einzelnen Gruppen ihre Ergebnisse mit denen der anderen Gruppen zusammenfassen. Hierdurch wird der statistische Fehler reduziert und die Klasse bzw. der Kurs kommt gemeinschaftlich zu einem guten Gesamtergebnis. Die intensive Arbeit mit dem Computer legt es nahe, ein solches Projekt in Kooperation mit dem Fach Informatik durchzuführen. In diesem Kontext ließen sich auch einfache Simulationsprogramme entwickeln, um deren Ergebnisse mit den im Experiment gemachten Beobachtungen zu vergleichen.

Stochastische Prozesse werden im Mathematikunterricht bereits ab Klasse 6 behandelt. Eine präzise Behandlung der Häufigkeitsverteilung, wie Einstein sie gegeben hat, ist erst in der Sekundarstufe II möglich. Hier werden beispielsweise Wahrscheinlichkeitsverteilungen und statistische Kenngrößen behandelt. Der besondere Reiz einer möglichen Einbindung eines Projektes „Brownsche Bewegung“ in den Mathematik-Unterricht bestünde darin, dass mit Zufallszahlen gearbeitet wird, die im Physikunterricht von den Schülern selbst ermittelt worden sind. Somit wird für sie die enge Verbindung von Mathematik und Physik erlebbar. Aus Sicht der Mathematik ist zu bemerken, dass bezüglich der Reinheit der Zufälligkeit die experimentell ermittelten Zufallszahlen wertvoller sind als Zahlen, die im Computer mit einem Zufallsgenerator berechnet worden sind.

Hervorzuheben ist die große Bedeutung, die das Projekt für den Physikunterricht in der Sekundarstufe II haben kann. Die Schüler können bei der Auseinandersetzung mit der Theorie Einsteins beispielhaft erleben, wie eine über eine rein phänomenologische Betrachtungsweise hinausgehende, exakte mathematische Beschreibung zu einem besonders tiefen Verständnis und zu neuen Erkenntnissen führt. Das wichtigste Ergebnis des Projekts wird die Bestimmung der Avogadrokonstanten sein, mit der die Realität der Atome bewiesen ist. Die Atome sind außerordentlich klein, aber nicht unendlich klein. Jetzt lässt sich, wie am Beispiel der Wassermoleküle dargelegt, die Größe aller Atome und Moleküle berechnen. Ebenso einfach lassen sich ihre absoluten Massen berechnen.

Einstein schreibt am Ende seiner Arbeit, nachdem er die Formel zur Berechnung der Avogadrokonstanten angegeben hat, als letzten Satz: „*Möge es bald einem Forscher gelingen, die hier aufgeworfene, für die Theorie der Wärme wichtige Frage zu entscheiden!*“ Einige Jahre später gelang die experimentelle Überprüfung, eine Leistung, die eines Nobelpreises würdig war, da sie zum ersten Mal die längst vermutete Existenz von Atomen bestätigte. Schüler, denen es mit dem hier vorgestellten Projekt gelingen wird, in einer gemeinschaftlichen Anstrengung entsprechend den theoretischen Vorgaben von Einstein die Avogadrokonstante mit hoher Genauigkeit zu bestimmen, können sich zu Recht als junge Forscher auf den Spuren Einsteins sehen.